导学案

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

必修第二册 RJB

江西美术出版社
全国百佳出版单位

目录 Contents

导学案 第四章 指数函数、对数函数与幂函数

4.1 指数与指数函数

4.1.1 实数指数幂及其运算

【学习目标】

1. 理解 n 次方根及根式的概念，正确运用根式的运算性质进行根式运算；
2. 掌握根式与分数指数幂的互化，掌握有理指数幂的运算性质.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 有理指数幂**

1. 根式

(1) n 次方根：一般地，给定大于 1 的正整数 n 和实数 a，如果存在实数 x，使得________，则 x 称为 a 的________.

(2)根式：当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义的时候，________称为根式，n 称为________，a 称为________.

一般地，根式具有以下性质：

① $(\sqrt[n]{a})^n=$________.

②当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=$________；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=$________.

2. 分数指数幂

正分数指数幂	① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ (a>0)$； ② $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=$________$\left(a>0,n,m\in\mathbf{N}_+\right.$，且 $\frac{m}{n}$ 为既约分数$\left.\right)$
负分数指数幂	$a^{-\frac{m}{n}}=$________$(a>0,n,m\in\mathbf{N}_+)$

3. 分数指数幂(有理数指数幂)的运算法则

$a^sa^t=$________，$(a^s)^t=$________，$(ab)^s=$________. $(s,t\in\mathbf{Q})$

【诊断分析】 1. 我们已经知道，若 $x^2=3$，则 $x=\pm\sqrt{3}$，那么 $(\sqrt{3})^2$ 等于什么？$\sqrt{3^2}$ 呢？$\sqrt{(-3)^2}$ 呢？

2. 我们知道 $3^2\times3^3=3^{2+3}$，那么 $64^{\frac{1}{2}}\times64^{\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ 成立吗？

3. 任何有意义的根式都能化为有理数指数幂的形式吗？

◆ **知识点二 实数指数幂**

无理指数幂 a^t ($a>0$，t 是无理数)是一个确定的________，有理指数幂的运算性质对于无理指数幂同样适用. 因此当 $a>0$，t 为任意实数时，实数指数幂 a^t 都有意义，对任意实数 s 和 t，类似有理指数幂的运算法则仍然成立.

课中探究 考点探究 素养小结

◆ **探究点一 根式的概念与性质**

例 1 (1)[2023·湖南汨罗一中高一月考] 已知函数 $f(x-1)=\sqrt[5]{(x-\pi)^5}+\pi$，则 $f(2)=$ ( )

A. $2\pi-3$ B. -3

C. 3 D. $3-2\pi$

(2)计算下列各式的值：

① $\sqrt[4]{(-5)^2}=$________；② $\sqrt[3]{(-6)^3}=$________.

(3)若 $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a-3}}$ 有意义，则实数 a 的取值范围是________.

变式 (1)计算下列各式的值：

①$\sqrt[6]{(3-\pi)^6}=$________;②$\sqrt[7]{(3-\pi)^7}=$________.

(2)若$\sqrt{(2a-1)^2}=\sqrt[3]{(1-2a)^3}$,则实数 a 的取值范围为______________.

[素养小结]

进行根式的计算时应先考虑根指数的形态，再考虑被开方数应符合的范围，然后进行有效的变形再化简、计算.

◆ 探究点二 根式与分数指数幂的互化

例 2 (1)(多选题)下列运算中正确的是 ( )

A. $\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\frac{\sqrt{a}}{a}$

B. $\sqrt{(\pi-2)^2}=\pi-2$

C. $(m^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{1}{4}})^{24}=\frac{m^8}{n^6}$

D. $(x^{3-2\sqrt{2}})^{3+2\sqrt{2}}=x$

(2)根式$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$的分数指数幂的形式为________.

变式 (1)(多选题)下列各式中一定成立的有( )

A. $\left(\frac{n}{m}\right)^7=n^7m^{\frac{1}{7}}$

B. $\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[3]{3}$

C. $\sqrt[4]{x^3+y^3}=(x+y)^{\frac{3}{4}}$

D. $\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{3}$

(2)[2024·上海黄浦区光明中学高一月考] 已知 $p>0,q>0$,若$\frac{p^3q^2}{\sqrt{p^4q^2}}=p^aq^b$,则$a+b=$________.

[素养小结]

根式与分数指数幂互化的规律及技巧：

(1)规律：根指数$\xleftrightarrow{\text{化为}}$分数指数幂的分母.

被开方数(式)的指数$\xleftrightarrow{\text{化为}}$分数指数幂的分子.

(2)技巧：当表达式中的根号较多时，由里向外用分数指数幂的形式写出来，然后再利用相关的运算性质进行化简.

◆ 探究点三 指数幂的运算

例 3 化简求值：

(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^0-16^{\frac{3}{4}}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6$;

(2)$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{6}}b^{-1}\div(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$.

变式 (1)[2023·江西抚州高一期末] 有的科学计算器无法直接计算很大的数，我们可以设计一下计算方法，以便利用科学计算器进行近似计算.利用计算器计算得到 $2^{10}=1.024\times10^3$,$1.024^{50}\approx3.2734$,则 2^{500} 的近似值是 ( )

A. 1.024×10^{53} B. 3.2734×10^{53}

C. 1.024×10^{150} D. 3.2734×10^{150}

(2)已知$b>0,m\in\mathbf{N}^*$,且$b^{-3m}=5^6$,则$b=$________.

[素养小结]

实数指数幂运算的基本原则和常规方法：

(1)基本原则：式子里既有分数指数幂又有根式时，一般把根式统一化为分数指数幂的形式，再利用运算法则化简.

(2)常规方法：①化负指数幂为正指数幂；

②化根式为分数指数幂；

③化小数为分数.

◆ 探究点四 条件求值

例 4 (1)已知 $3^x=4,3^y=2$,则$3^{2x-y}=$________,$9^{2x-y}+27^{x-y}=$________.

(2)已知 $x+y=12,xy=9$,且 $x<y$,则$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=$________.

变式 (1)(多选题)[2023·江苏淮安高一期末] 规定 a,b 之间的一种运算，记作(a,b),若 $a^c=b$,则$(a,b)=c$,则下列结论正确的是 ( )

A. $(4,6)=2\times(2,3)$

B. $(2,2)=1$

C. $(4,5)+(4,6)=(4,30)$

D. 若 $a>1,b>1$,则$(a,b)+(b,a)\geqslant2$

(2)已知$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=4$，则 $a^{2}+a^{-2}=$________.

［素养小结］

解决此类问题时，先将所求的式子化简，再将已知条件代入.在化简过程中，要注意平方差公式及完全平方公式的灵活应用.

拓展 已知 $67^{x}=27$，$603^{y}=81$，则$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=$________.

课堂评价 知识评价 素养形成

1. $\frac{8^{\frac{2}{3}}a^{3}}{2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt[5]{a^{4}}}(a>0)$的值是 （ ）

A. 1 B. a

C. $a^{\frac{1}{5}}$ D. $a^{\frac{17}{10}}$

2. 下列运算正确的是 （ ）

A. $a^{2}\cdot a^{3}=a^{6}$ B. $(3a)^{3}=9a^{3}$

C. $\sqrt[8]{a^{8}}=a$ D. $(-2a^{2})^{3}=-8a^{6}$

3. 已知 $a>0$，$b>0$，则$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})\cdot(-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})\div\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)=$ （ ）

A. $-\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}$ B. $-3a^{\frac{2}{3}}$

C. $-\frac{1}{3}a$ D. $-3a$

4. 已知 $x+x^{-1}=4(0<x<1)$，则$\frac{x^{2}-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}$的值为 （ ）

A. $\sqrt{6}$ B. 6

C. $-4\sqrt{2}$ D. 8

5. 化简：$\sqrt[4]{(a-b)^{8}}=$________.

4.1.2 指数函数的性质与图象

第 1 课时 指数函数的性质与图象

【学习目标】

1. 理解指数函数的概念与意义，掌握指数函数的定义域、值域的求法；
2. 能画出具体指数函数的图象，并能根据指数函数的图象说明指数函数的性质；
3. 掌握指数函数的图象与性质，能借助指数函数的性质比较大小.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 指数函数的定义

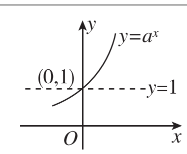
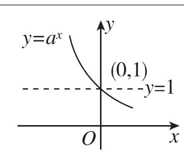
一般地，函数 $y=a^{x}$ 称为____________，其中 a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq1$.

注意：指数函数的系数为 1.

【诊断分析】指数函数中为什么规定 $a>0$ 且 $a\neq1$?

◆ 知识点二 指数函数的图象与性质

函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象和性质

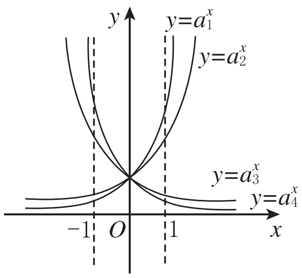
	底数	$a>1$	$0<a<1$
	图象		
性质	定义域	**R**	
	值域	$(0,+\infty)$	
	过定点	________	
	单调性	在 **R** 上是____函数	在 **R** 上是____函数
	函数值的变化	当 $x<0$ 时，$y\in$____，当 $x>0$ 时，$y\in$____	当 $x<0$ 时，$y\in$____，当 $x>0$ 时，$y\in$____

◆ 知识点三　底数与指数函数图象的关系

1. 由指数函数 $y=a^x$ 的图象与直线 $x=1$ 的交点 $(1,a)$ 可知，在 y 轴右侧，图象从________到________相应的底数由小变大.

2. 由指数函数 $y=a^x$ 的图象与直线 $x=-1$ 的交点 $\left(-1,\frac{1}{a}\right)$ 可知，在 y 轴左侧，图象从下到上相应的底数____________.

如图所示，指数函数底数的大小关系为 $0<a_4<a_3<1<a_2<a_1$.



【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)指数函数的图象一定在 x 轴的上方.　(　　)

(2)函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 **R** 上是减函数.　(　　)

(3)函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图象关于 x 轴对称.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　指数函数定义的应用

例 1 (1)(多选题)下列各函数中是指数函数的是　(　　)

A. $y=3^x$　　B. $y=-3^x$

C. $y=(-3)^x$　　D. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(2)[2023·吉林长春外国语学校高一期末] 若函数 $f(x)=(a^2-5a+7)a^x+6-2a$ 是指数函数，则 $a=$ ________.

变式 (1)指数函数 $f(x)$ 的图象经过点 $P\left(3,\frac{1}{27}\right)$，则 $f(-2)=$　(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. 9

(2)已知 p：函数 $f(x)=(m^2-3m+3)m^x$ 是指数函数，q：$m^2-3m+2=0$，则 q 是 p 的　(　　)

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

[素养小结]

判断一个函数是否为指数函数的方法：

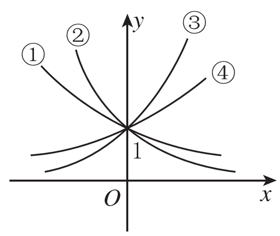
(1)底数的值是否符合要求；

(2)a^x 前的系数是否为 1；

(3)指数是否符合要求.

◆ 探究点二　指数函数图象及应用

例 2 (1)如图所示的是指数函数①$y=a^x$，②$y=b^x$，③$y=c^x$，④$y=d^x$ 的图象，则 a，b，c，d 与 1 的大小关系是　(　　)



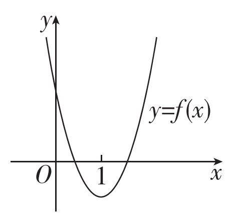
A. $a<b<1<c<d$

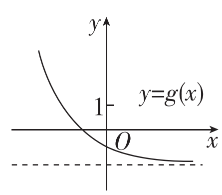
B. $b<a<1<d<c$

C. $1<a<b<c<d$

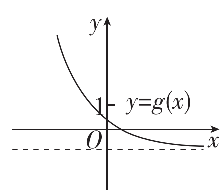
D. $a<b<1<d<c$

(2)[2023·重庆十八中高一月考] 函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(a>b)$ 的图象如图所示，则 $g(x)=a^x-b$ 的图象可能是　(　　)

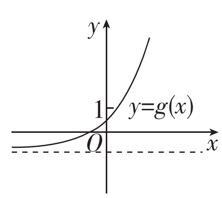




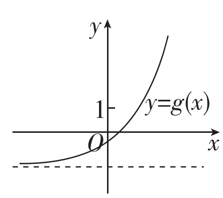
A



B



C



D

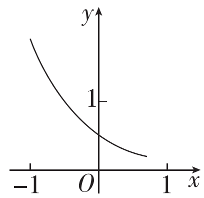
(3)已知函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图所示,其中 a,b 为常数,则下列结论正确的是 (　　)

A. $a>1,b<0$

B. $a>1,b>0$

C. $0<a<1,b>0$

D. $0<a<1,b<0$

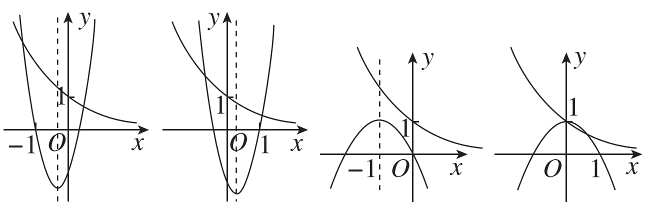


变式 (1)已知 $0<a<1,b<-1$,则函数 $y=a^x+b$ 的图象必定不经过 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(2)在同一个平面直角坐标系中,二次函数 $y=ax^2+bx$ 与指数函数 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ 的图象可能为 (　　)



A　　B　　C　　D

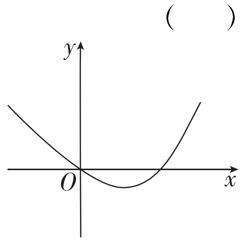
(3)若函数 $f(x)=(a^x-1)(x-b+1)$ 的图象如图所示,则 (　　)

A. $0<a<1,b<1$

B. $0<a<1,b>1$

C. $a>1,b<1$

D. $a>1,b>1$



[素养小结]

(1)无论指数函数的底数 a 如何变化,指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象与直线 $x=1$ 均相交于点 $(1,a)$,由图象可知,在 y 轴右侧,图象从下到上相应的底数由小变大.

(2)处理指数函数的图象的方法:①抓住特殊点,指数函数图象过点(0,1);②巧用图象平移变换;③注意函数单调性的影响.

◆ 探究点三　利用指数函数的单调性比较大小

例 3 比较下列各组数的大小:

①$1.8^{2.2}$______$1.8^{3.2}$;②$0.3^{-0.4}$______$0.3^{-0.6}$;

③$2.1^{0.3}$______$0.9^{3.1}$;④$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$______$\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$.

变式 将下列各数按从小到大排序:$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}},2^{\frac{2}{3}},\left(-\frac{2}{3}\right)^3,\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}},\left(\frac{5}{6}\right)^0$.

[素养小结]

比较幂的大小的方法:

(1)底数相同的直接利用单调性;

(2)底数、指数都不同的把 1 作为中间量比较;

(3)底数不同指数相同的借助图象间的关系比较.

拓展 (多选题)已知实数 a,b 满足等式 $2^a=3^b$,则下列关系式中可能成立的是 (　　)

A. $0<b<a$　　B. $a<b<0$

C. $b<a<0$　　D. $a=b$

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 已知函数 $f(x)=(a-2)a^x$ 是指数函数,则 $f(2)=$ (　　)

A. 2　　B. 3　　C. 9　　D. 16

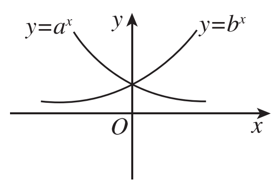
2. 指数函数 $y=a^x$ 与 $y=b^x$ 的图象如图所示,则 (　　)

A. $a<0,b<0$

B. $a<0,b>0$

C. $0<a<1,b>1$

D. $0<a<1,0<b<1$



3. 已知 $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.3},b=1.1^{0.7},c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,则 a,b,c 的大小关系为 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$

C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

4. "$\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$"是"$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 若 $a>0$ 且 $a\neq1$,则函数 $f(x)=a^{x-4}+3$ 的图象恒过的定点坐标为________.

第 2 课时　指数函数的性质与图象的应用

【学习目标】

1. 会应用指数函数的性质求复合函数的定义域、值域；
2. 掌握指数型函数的单调区间的求法及单调性的判断；
3. 掌握指数函数在现实生活中的应用；
4. 掌握指数函数的综合性问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　与指数函数有关的复合函数

函数 $y=a^{f(x)}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的定义域、值域可转化为函数 $y=a^t$ 进行研究，其中 $t=$______. 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $y=a^{f(x)}$ 的定义域为______. 函数 $y=a^{f(x)}$ 的值域要根据 $f(x)$ 的值域及函数 $y=a^t$ 的单调性研究.

【诊断分析】函数 $y=3^{x^2+1}$ 的定义域是________，值域是________.

◆ 知识点二　指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的单调性的应用

1. a 的取值与单调性

当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，若 $x_1<x_2$，则 a^{x_1}________a^{x_2}；

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，若 $x_1<x_2$，则 a^{x_1}______a^{x_2}.

2. 单调性的应用——解指数不等式

对形如 $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ 的不等式的讨论：

当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow$________________；

当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow$________________.

【诊断分析】(1)不等式 $2^{2x+3}>\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 的解集是________.

(2)若 $a^3<a^{-2}(a>0$ 且 $a\neq1)$，则实数 a 的取值范围是________.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　指数型函数的定义域和值域

例 1　求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\sqrt{1-3^x}$；(2) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{-|x|}}$；

(3) $y=4^x+2^{x+1}+2$；(4) $y=2^{\frac{1}{x-4}}$.

变式 (1)[2023 · 山东滨州北镇中学高一期末] 若函数 $f(x)=\sqrt{2^{x^2-2ax+3}-2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为　(　　)

A. $[-1,0]$　　B. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

C. $(0,\sqrt{2}]$　　D. $\mathbf{R}$

(2)[2023 · 江西新余高一期末] 已知函数 $y=a^{2x}+2a^x-1(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值是 14，则 a 的值为　(　　)

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$

C. -5　　D. 3 或 $\frac{1}{3}$

[素养小结]

函数 $y=a^{f(x)}$ 的定义域与值域的求法：

(1)形如 $y=a^{f(x)}$ 的函数的定义域就是 $f(x)$ 的定义域.

(2)形如 $y=a^{f(x)}$ 的值域，应先求出 $f(x)$ 的值域，再由函数 $y=a^x$ 的单调性求出 $y=a^{f(x)}$ 的值域. 若 a 的取值范围不确定，则需对 a 进行分类讨论.

◆ **探究点二　简单的指数不等式的解法**

例 2 (1)不等式 $2^{x^2-x}<4$ 的解集为__________.

(2)已知 $a^{-5x}>a^{3x+12}$($a>0$ 且 $a\neq1$),求 x 的取值范围.

变式 (1)不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-1}\leqslant3^{3x-4}$ 的解集为__________.

(2)已知$(a^2-a+2)^{2x}>(a^2-a+2)^{1-3x}$,则 x 的取值范围是________.

[素养小结]

简单指数型不等式的解法:

(1)指数型不等式 $a^{f(x)}>a^{g(x)}$($a>0$ 且 $a\neq1$)的解法:

当 $a>1$ 时,可化为 $f(x)>g(x)$;

当 $0<a<1$ 时,可化为 $f(x)<g(x)$.

(2)当不等式的形式不是同底指数式的形式时,要先进行变形将不等式两边的底数进行统一,此时常用到以下结论:$1=a^0$($a>0$ 且 $a\neq1$),$a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)等.

◆ **探究点三　指数型函数的单调性**

例 3 (1)[2024·云南昆明高一期末] 函数 $f(x)=3^{x(x-2)}$的单调递增区间为　(　　)

A. $(0,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\mathbf{R}$　　D. $(-\infty,1)$

(2)函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+17$ 的单调递增区间是________.

变式 若函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x^2}$ 在区间 D 上是减函数,请写出一个符合条件的区间 $D=$________.

[素养小结]

与指数型函数有关的复合函数的单调性的求解步骤和一般结论:

(1)求解步骤:①求定义域,依据题意明确研究范围;②拆分,把原函数拆分为几个基本函数;③定性质,分层逐一求单调性;④下结论,根据复合函数的单调性法则,即"同增异减",得出原函数的单调性.

(2)一般结论:形如 $y=a^{f(x)}$($a>0$ 且 $a\neq1$)的函数的单调性,令 $u=f(x)$,$x\in[m,n]$,若两个函数 $y=a^u$ 与 $u=f(x)$的单调性相同,则函数 $y=a^{f(x)}$ 在$[m,n]$上是增函数;若两者的单调性相异(即一增一减),则函数 $y=a^{f(x)}$ 在$[m,n]$上是减函数.

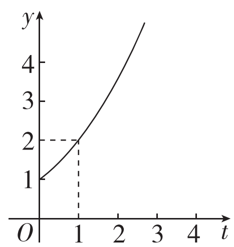
◆ **探究点四　指数函数的实际应用**

例 4 某地下车库在排气扇发生故障的情况下,测得空气中一氧化碳含量达到了危险状态,经抢修,排气扇恢复正常.排气后 4 分钟测得车库内的一氧化碳浓度为 64 ppm(ppm 为浓度单位,一个 ppm 表示百万分之一),再过 4 分钟又测得车库内的一氧化碳浓度为 32 ppm.由检验知该地下车库一氧化碳浓度 y(ppm)与排气时间 t(分钟)存在函数关系 $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{mt}$($c$,$m$ 为常数).

(1)求 c,m 的值;

(2)若空气中一氧化碳浓度不高于 0.5 ppm 为正常,问至少排气多少分钟,这个地下车库中的一氧化碳含量才能达到正常状态?

变式 (多选题)如图,某池塘里浮萍的面积 y(单位:m^2)与时间 t(单位:月)的关系为 $y=a^t$($a>0$ 且 $a\neq1$),则下列说法正确的是 ( )



A. 浮萍每月的增长率为 2

B. 第 6 个月时,浮萍的面积为 64 m^2

C. 浮萍每月增加的面积都相等

D. 若浮萍面积长到 3 m^2,5 m^2,15 m^2 所经过的时间分别是 t_1,t_2,t_3,则 $t_1+t_2=t_3$

[素养小结]

解决指数函数的应用问题的步骤:

(1)审题:理解题意,弄清楚关键字词和字母的意义,从题意中提取信息;

(2)建模:根据已知条件,列出指数函数的关系式;

(3)解模:运用数学知识解决问题;

(4)回归:还原为实际问题,归纳得出结论.

课堂评价 知识评价 素养形成

1. [2023·四川成都高一期中] 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2^x-4}}{x-5}$ 的定义域为 ( )

A. $(-\infty,2]$

B. $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$

C. $[2,+\infty)$

D. $[2,5)\cup(5,+\infty)$

2. 已知指数函数 $y=\left(\dfrac{a}{2}\right)^x$ 单调递减,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(0,2)$　　D. $(-2,0)$

3. 已知函数 $y=a^x-2$($a>0$ 且 $a\neq1$,$-1\leqslant x\leqslant1$)的值域是 $\left[-\dfrac{5}{3},1\right]$,则实数 a 的值为 ( )

A. 3　　B. $\dfrac{1}{3}$

C. 3 或 $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{3}{2}$

4. 若函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x^2+4ax}$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增,则实数 a 的取值范围为______.

5. 已知 $f(x)=3^{2x}-(k+1)3^x+9$,当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x)>0$ 恒成立,则实数 k 的取值范围是______.

4.2 对数与对数函数

4.2.1 对数运算

【学习目标】

1. 能够在具体的数学问题情境中,得出对数的概念;
2. 由指数运算与对数运算的关系,得出对数运算的性质;
3. 能够利用对数运算的性质进行对数运算.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 对数及相关概念

1. 对数的概念:在表达式 $a^b=N$($a>0$ 且 $a\neq1$,$N\in(0,+\infty)$)中,当 a 与 N 确定之后,只有唯一的 b 能满足这个式子,此时,幂指数 b 称为以 a 为底 N 的______,记作______,其中 a 称为对数的______,N 称为对数的______.

2. 常用对数:以______为底的对数称为常用对数,即 $\log_{10}N$ 是常用对数,通常简写为______.

3. 自然对数:在科学技术中,常使用以无理数 e=2.718 28…为底的对数,以______为底的对数称为______,自然对数 $\log_e N$ 通常简写为______.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)$\log_a N$ 是 $\log_a$ 与 N 的乘积.　　(　　)

(2)$(-2)^3=-8$ 可化为 $\log_{(-2)}(-8)=3$.　　(　　)

(3)对数运算的实质是求幂指数.　　(　　)

2. (1)如何准确理解指数式与对数式的关系?

(2)在对数概念中,为什么规定 $a>0$ 且 $a\neq1$ 呢?

◆ 知识点二　对数的性质

1. ________没有对数.

2. 当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时,

(1)$\log_a 1=$________;

(2)$\log_a a=$________;

(3)$a^{\log_a N}=$________;

(4)$b=\log_a N$ 的充要条件是________;

(5)$\log_a a^b=$________.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　对数的概念

例 1 已知函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$,若 $b=\log_a 10$,则 $f(b+1)=$________.

变式 [2023·贵州贵阳高一期末] 使式子 $\log_{(3x-1)}(2-x)$有意义的 x 的取值范围是　(　　)

A. $x>2$

B. $\frac{1}{3}<x<2$

C. $\frac{1}{3}<x<2$ 且 $x\neq\frac{2}{3}$

D. $x<2$

[素养小结]

(1)要注意对数中的底数和真数与指数中的底数和幂指数的对应关系.

(2)在对数中,对底数和真数的范围要求是求解自变量取值范围的关键.

◆ 探究点二　指数式与对数式的互化

例 2 (1)[2024·石家庄精英中学高一期末] 已知 $\log_b 3=m$,$\log_b 2=n(b>0$ 且 $b\neq1)$,则 b^{3m+n} 的值为________.

(2)将下列指数式与对数式互化:

①$\lg 100=2$;②$\log_{\frac{1}{3}}27=-3$;③$\log_{\sqrt{3}}x=6$;

④$4^3=64$;⑤$3^{-2}=\frac{1}{9}$;⑥$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$.

变式 (1)已知 $a>0$,$b>0$,$\log_{\sqrt{3}}a=\log_3 b=\log_{3\sqrt{3}}(6a+b)$,则$\frac{b}{a}=$　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. 2　　D. 3

(2)将下列各等式化为相应的对数式或指数式:

①$10^{-3}=\frac{1}{1000}$;②$\ln 2=x$.

[素养小结]

指数式与对数式互化时应注意的问题:

(1)利用对数式与指数式间的互化公式互化时,要注意字母的位置改变.

(2)对数式的书写要规范:底数 a 要写在符号“log”的右下角,真数正常表示.

◆ **探究点三　利用对数的性质求值**

例 3 (1)求下列各式的值：

①$\log_4 64=$________；②$\log_5 3^0=$________；

③$\lg 0.01=$________；④$\log_{12}12=$________.

(2)求下列各式中 x 的值：

①$\log_3(\lg x)=1$，$x=$________；

②$\log_x 27=\frac{3}{2}$，$x=$________；

③$\ln x=-\frac{1}{2}$，$x=$________；

④$x=\log_{\frac{1}{2}}16$，$x=$________.

(3)计算：①$9^{\frac{1}{2}\log_3 4}=$________；

②$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+\log_3 2}=$________.

变式 (1)已知 $a>b>c>1$，且 $\log_a(\log_{\frac{1}{a}}x)=\log_b(\log_{\frac{1}{b}}y)=\log_c(\log_{\frac{1}{c}}z)=0$，则　(　　)

A. $1<z<y<x$　　B. $0<z<y<x<1$

C. $0<x<y<z<1$　　D. $1<x<y<z$

(2)求下列各式的值：

①$2^{\log_2 3}+3^{\log_3 2}$；②$2^{2+\log_2\frac{1}{3}}$；③$10^{1+\lg 2}$；④$e^{-1+\ln 3}$.

[素养小结]

1. 利用对数性质求解的两类问题的解题方法：

(1)求多重对数式的值，应从内到外求，如求 $\log_a(\log_b c)$ 的值，先求 $\log_b c$ 的值，再求 $\log_a(\log_b c)$ 的值；

(2)已知多重对数式的值，求变量的值，应从外到内求，逐步脱去“log”后再求解.

2. 注意对数恒等式 $a^{\log_a N}=N$ 的应用.

◆ **探究点四　综合应用**

例 4 (1)已知 $f(x)=\begin{cases}\ln x+1, x>0,\\ f(x+2), x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-3)=$________.

(2)求下列各式中 x 的值：

①$\log_{(2x^2-1)}(3x^2+2x-1)=1$；

②$\log_{(2+\sqrt{3})}\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=x$.

变式 已知符号$[x]$表示“不超过 x 的最大整数”，如$[-2]=-2$，$[-1.5]=-2$，$[2.5]=2$，则$\left[\log_2\frac{1}{4}\right]+\left[\log_2\frac{1}{3}\right]+\left[\log_2\frac{1}{2}\right]+[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+[\log_2 4]$的值为　(　　)

A. -1　　B. -2

C. 0　　D. 1

[素养小结]

在求解有关对数的化简求值等问题时，首先要借助指数幂的运算性质，使其变形为能够直接运用对数恒等式的情况，再借助对数恒等式或指数幂的运算求值.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 已知 $\log_x 8=3$，则 x 的值为　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. [2024·江苏苏州高一期末] 若 $\log_3(\log_2 x)=1$，则 $x^{-\frac{1}{2}}$等于　(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$　　C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$　　D. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

3. (多选题)下列说法中正确的是　(　　)

A. 零和负数没有对数

B. 任何一个指数式都可以化成对数式

C. 以 10 为底的对数叫作常用对数

D. 以 e 为底的对数叫作自然对数

4. 若 $a=\log_4 3$，则 $2^a+2^{-a}=$________.

5. 若关于实数 x 的方程 $\log_2(x-2k)=\log_2\sqrt{x^2-4}$有解，则实数 k 的取值范围为________.

4.2.2 对数运算法则

【学习目标】

1. 理解对数的运算法则；
2. 能用换底公式将一般对数转化成自然对数或常用对数；
3. 会运用运算法则进行一些简单的化简与证明.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　对数的运算法则

(1)$\log_a(MN)=$________________,

(2)$\log_a M^{\alpha}=$________,

(3)$\log_a \dfrac{M}{N}=$________________.

其中,$a>0$ 且 $a\neq1$,$M>0$,$N>0$,$\alpha\in\mathbf{R}$.

◆ 知识点二　对数换底公式

1. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$,其中 $a>0$ 且 $a\neq1$,$b>0$,$c>0$ 且 $c\neq1$,这一结果通常被称为换底公式.

2. 对数换底公式的重要推论：

(1)$\log_a N=\dfrac{1}{\log_N a}$($N>0$ 且 $N\neq1$,$a>0$ 且 $a\neq1$)；

(2)$\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$($a>0$ 且 $a\neq1$,$b>0$)；

(3)$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$($a>0$,$b>0$,$c>0$,$d>0$ 且 $a\neq1$,$b\neq1$,$c\neq1$).

【诊断分析】(1)若 $\log_a 2=m$,则 $\log_4 a=$________.

(2)若 $\lg 6=a$,$\lg 8=b$,则 $\log_6 8=$________.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　对数的运算法则

例 1　用 $\log_a x$,$\log_a y$,$\log_a z$ 表示下列各式：

(1)$\log_a(xyz)$；(2)$\log_a\dfrac{xy^2}{z}$；(3)$\log_a\dfrac{\sqrt[3]{x^2}y}{\sqrt{z}}$；

(4)$\log_a\dfrac{x^5y^3}{z^2}$.

变式　用 $\log_a x$,$\log_a y$,$\log_a z$ 表示下列各式：

(1)$\log_a x^{-4}$；(2)$\log_a(xy^{-1}z^2)$；(3)$\log_a\dfrac{\sqrt{x}}{y^2z}$.

[素养小结]

正确应用计算公式是解决这类问题的关键,尤其不要混淆对数的加减运算和乘除运算.

◆ 探究点二　对数运算法则的应用

例 2　(1)计算:$\log_2\sqrt{\dfrac{7}{48}}+\log_2 12-\dfrac{1}{2}\log_2 42$.

(2)计算:$\lg 5\cdot(\lg 8+\lg 1000)+3(\lg 2)^2+\lg\dfrac{1}{6}+\lg 0.06$.

变式 计算下列各式的值：

(1)$\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$；

(2)$\lg 5^2+\frac{2}{3}\lg 8+\lg 20\cdot\lg 5+(\lg 2)^2$.

[素养小结]

(1)对数运算法则的作用：

①利用对数的运算法则，可以将真数的积、商、幂的运算转化为对数的和、差、倍数运算，反之亦然.

②通过对对数运算法则的灵活运用，能起到降幂、去分母、去根号的作用.

(2)运用对数的运算法则时要注意的问题：

①注意正用、逆用三条法则.

②在进行对数运算时，要判断能否使用运算法则.

③不要将“积商幂的对数”和“对数的积商幂”混淆.

拓展 已知$10^{(\lg x)^2}+x^{\lg x}=20$，求$x$的值.

◆ 探究点三 换底公式的应用

例 3 (1)[2024·陕西咸阳高一期末] 若$2^x=\frac{5}{2}$，$\lg 2\approx 0.3010$，则x的值约为 ( )

A. 1.322　　B. 1.410

C. 1.507　　D. 1.669

(2)[2024·广东佛山高一期末] 记$A=1\times 2\times 3\times\cdots\times 2024$，则$\frac{1}{\log_2 A}+\frac{1}{\log_3 A}+\frac{1}{\log_4 A}+\cdots+\frac{1}{\log_{2024} A}=$________.

(3)计算下列各式的值：

①$(\log_4 3+\log_8 3)\log_3 2$；②$\frac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_7 9}{\log_5\frac{1}{3}\cdot\log_7\sqrt[3]{4}}$.

变式 (1)计算：$\frac{\log_8 9}{\log_2 3}=$ ( )

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. 1　　D. 2

(2)计算：$(\log_4 3+\log_8 3)\cdot(\log_3 2+\log_9 2)=$________.

(3)已知$\log_{18}9=a$，$18^b=5$，则$\log_{36}45$可以用a，b表示为________.

[素养小结]

(1)利用对数的换底公式能够将不同底的对数化为常用对数或自然对数或同底的对数，可用对数的运算法则来解决对数求值问题，同时要注意换底公式的逆用.

(2)题目中有指数式和对数式时，要注意将指数式与对数式统一成一种形式.

◆ **探究点四　对数的实际应用**

例 4 地震震级是根据地震仪记录的地震波振幅来测定的，一般采用里氏震级标准. 震级(M)是用距震中 100 千米处的标准地震仪所记录的地震波最大振幅值的对数来表示的. 里氏震级的计算公式为 $M=\lg A-\lg A_0$，其中 A 是被测地震的最大振幅，A_0 是“标准地震”的振幅(使用标准地震振幅是为了修正测震仪距实际震中的距离造成的偏差). 根据该公式可知，7.5 级地震的最大振幅是 6 级地震的最大振幅的________倍. (精确到 1)

变式 神舟十二号载人飞船搭载 3 名宇航员进入太空，在中国空间站完成了为期三个月的太空驻留任务，期间进行了很多空间实验，目前已经顺利返回地球. 在太空中水资源有限，要通过回收水的方法制造可用水，回收水是指将宇航员的尿液、汗液和太空中的水收集起来经过特殊的净水器处理后循环使用. 净化水的过程中，每增加一次过滤可减少水中 20% 的杂质，要使水中杂质减少到原来的 5% 以下，则至少需要过滤的次数为(参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$)　(　　)

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

[素养小结]

解决这类问题的关键是把实际问题转化为对数的运算问题，考查数学建模能力.

课堂评价　知识评价　素养形成

1. $2\log_6 3+\log_6 4=$　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. $100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}=$　(　　)

A. $\frac{9}{4}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. [2024·河北保定高一期末] 已知 $a=(\log_2 3)^2$，$b=\log_2\frac{9}{2}$，则　(　　)

A. $2>a>b$　　B. $b>2>a$

C. $b>a>2$　　D. $a>b>2$

4. [2024·江苏宿迁高一期末] 已知 $\log_2 3=a$，$2^b=7$，则 $\log_{42}56$ 用 a,b 表示为　(　　)

A. $\frac{b+3}{a+b}$　　B. $\frac{3b}{a+b}$

C. $\frac{b+3}{a+b+1}$　　D. $\frac{3b}{a+b+1}$

5. 若 $1000^a=5$，$100^b=2$，则 $3a+2b=$________.

4.2.3　对数函数的性质与图象

第 1 课时　对数函数的性质与图象

【学习目标】

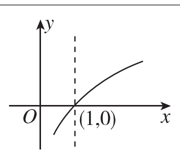
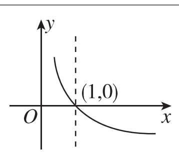
1. 理解对数函数的概念、图象及性质；
2. 根据对数函数的定义判断一个函数是否为对数函数；
3. 初步掌握对数函数的图象和性质，会解与对数函数相关的定义域、值域问题.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　对数函数的定义**

一般地，函数____________称为对数函数，其中 a 是常数，____________.

◆ **知识点二　对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象与性质**

解析式	$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)	
底数	$a>1$	$0<a<1$
图象		

(续表)

性质	定义域	$(0,+\infty)$	
	值域	________	
	单调性	增函数	减函数
	过定点	图象过定点________，即 $\log_a 1=$________	
	函数值特征	$x\in(0,1)$ 时，$y\in$________；$x\in(1,+\infty)$时，$y\in$________	$x\in(0,1)$时，$y\in$________；$x\in(1,+\infty)$时，$y\in$________
	对称性	$y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象关于____轴对称	

【诊断分析】(1)对数函数的图象一定在 y 轴的右侧吗?
(2)函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的底数变化对图象位置有何影响?

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　对数函数的概念及其应用

例1 (1)下列函数中是对数函数的是 (　　)

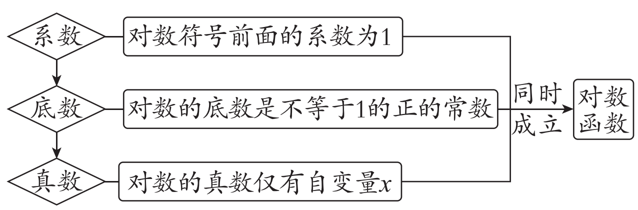
A. $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　B. $y=2\log_4(1-x)$

C. $y=\ln x$　　D. $y=\log_{(a^2+a)}x$

(2)已知函数 $f(x)=(m^2-3m+2)+\log_m x$ 是对数函数,则 $m=$________.

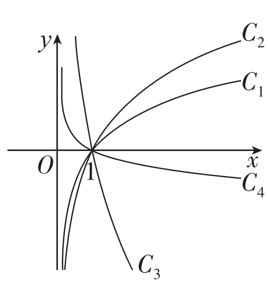
[素养小结]

判断一个函数是对数函数的方法:



◆ 探究点二　对数函数的图象

例2 如图是四个对数函数的图象,已知底数 a 的值可取 $\sqrt{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{8}$,则 C_1, C_2, C_3, C_4 对应的 a 的值依次是 (　　)



A. $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{8}$

C. $\frac{5}{3}$, $\sqrt{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{8}$

D. $\sqrt{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{5}$

变式 (1)若函数 $y=\log_a(x-3)+1(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象过定点 P,则点 P 的坐标是 (　　)

A. $(4,1)$　　B. $(3,1)$

C. $(4,0)$　　D. $(3,0)$

(2)(多选题)[2024·河南南阳高一期末] 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,且 $f(a)=g(b)$,则下列式子可能成立的是 (　　)

A. $a<0$, $0<b<1$　　B. $a=b$

C. $a>b>1$　　D. $a>1$, $0<b<1$

[素养小结]

在同一直角坐标系中作出不同对数函数的图象,则在第一象限按逆时针方向,图象对应的函数的底数从大到小排列.

◆ 探究点三　对数函数的性质

角度一　与对数函数相关的定义域

例3 (1)函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\ln x$ 的定义域是________.

(2)函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定义域是________.

变式 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\lg(2-x)}$;

(2) $y=\dfrac{\lg(4-x)}{x-3}$;

(3) $y=\log_{(2x-1)}(-4x+8)$.

[素养小结]

求与对数函数有关的定义域时应注意的两点：

(1)要遵循以前已学习过的求定义域的方法，如分式的分母不为零，偶次根式被开方数(或式)大于或等于零等.

(2)遵循对数函数自身的要求：一是真数大于零；二是底数大于零且不等于1；三是按底数的取值应用单调性，有针对性地解不等式.

注意：函数的定义域最后的结果一定要用集合或区间的形式表示.

角度二　对数函数的值域与最值

例4 (1)函数 $f(x)=\log_2 x, x\in\left[\frac{1}{4},8\right]$的值域是　　(　　)

A. $[-3,-2]$　　B. $[-2,3]$

C. $[-3,3]$　　D. $[-2,2]$

(2)若函数 $f(x)=\log_a x(0<a<1)$在区间$[a,2a]$上的最大值与最小值之和为1，则 $a=$________.

变式 (1)[2024·陕西西安高一期末] 已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$在区间$\left[\frac{1}{4},16\right]$上的最大值是2，则 $a=$________.

(2)[2024·贵州毕节高一期末] 已知函数 $f(x)=\log_a x+b(a>0$ 且 $a\neq1)$的定义域和值域都是$(1,2)$，则 $a^b=$________.

[素养小结]

对数函数的值域和最值主要是根据对数函数的单调性来求解的，必要时注意对对数的底数进行分类讨论.

角度三　对数函数单调性的应用

例5 比较下列各组数的大小：

(1)$\log_5\frac{3}{4}$与$\log_5\frac{4}{3}$；(2)$\log_{\frac{1}{3}}2$与$\log_{\frac{1}{5}}2$；

(3)$\log_2 3$与$\log_5 4$.

变式 (1)[2024·湖北宜昌高一期末] 已知 $a=\log_{16}3, b=\lg 2\cdot\lg 5, c=\log_9 2$，则 a,b,c 的大小关系为　　(　　)

A. $a>c>b$　　B. $c>b>a$

C. $a>b>c$　　D. $c>a>b$

(2)设 $a=\log_3 2, b=\log_3\frac{1}{2}, c=3^{\frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系是　　(　　)

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<b<a$

(3)若 $\log_a\frac{2}{3}>1$，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　B. $(0,1)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　D. $\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

[素养小结]

利用函数的单调性可进行对数大小的比较，常用的方法如下：

(1)同底数的两个对数值的大小比较，根据对数函数的单调性比较.

(2)底数不同而真数相同的两个对数值的大小比较，常用数形结合思想来解决，也可用换底公式化为同底，再进行比较.

(3)底数不同且真数也不同的两个对数值的大小比较，常引入中间量进行比较，通常取中间量$-1,0,1$等.

拓展 已知 $0<t<1, a=\log_3 t, b=\log_4 t, c=\log_5 t$，则　　(　　)

A. $4b<5c<3a$　　B. $5c<3a<4b$

C. $5c<4b<3a$　　D. $4b<3a<5c$

课堂评价

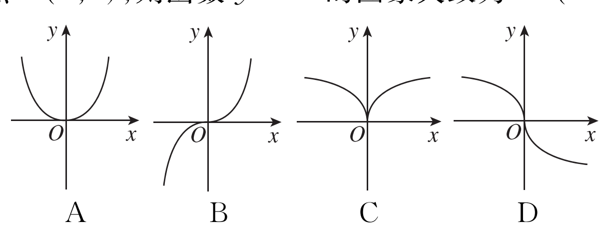
知识评价　素养形成

1. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{\ln x}$的定义域是　　(　　)

A. $(0,2]$　　B. $(0,2)$

C. $(0,1)\cup(1,2]$　　D. $(0,1)\cup(1,2)$

2. 已知函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象经过点 $P(3,1)$，则函数 $y=x^a$ 的图象大致为　　(　　)



3. 已知函数 $y=\log_a x-1(a>0$ 且 $a\neq1)$,则该函数的图象恒过定点 ( )

A. $(0,-1)$ B. $(1,1)$

C. $(1,-1)$ D. $(1,0)$

4. [2024·上海吴淞中学高一期末] 已知函数 $f(x)=(a-1)\log_a x+b$ $(a>0$ 且 $a\neq1$, b 为实数),则下列说法正确的是 ( )

A. 函数 $f(x)$ 的单调性只与 a 有关,与 b 无关

B. 函数 $f(x)$ 的单调性只与 b 有关,与 a 无关

C. 函数 $f(x)$ 的单调性与 a,b 都有关

D. 函数 $f(x)$ 的单调性与 a,b 都无关

5. 若函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在区间 $[a,2a^2]$ 上的最大值比最小值大 2,则 $a=$________.

第 2 课时 对数函数的图象及其性质的应用

【学习目标】

1. 会进行函数性质与图象的结合;
2. 掌握与对数函数有关的复合函数的单调性的求解方法;
3. 会解决对数函数的综合性问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ **知识点** $y=\log_a f(x)$ **型函数性质的研究**

1. 定义域:由 $f(x)>0$ 解得 x 的取值范围,即为函数 $y=\log_a f(x)$ 的定义域.

2. 值域:在函数 $y=\log_a f(x)$ 的定义域中确定 $t=f(x)$ 的值域,再由 $y=\log_a t$ 的单调性确定函数的值域.

3. 单调性:在定义域内考虑 $t=f(x)$ 与 $y=\log_a t$ 的单调性,根据____________法则判定,或运用单调性定义判定.

4. 奇偶性:根据奇函数、偶函数的定义判定.

5. 最值:在 $f(x)>0$ 的条件下,确定 $t=f(x)$ 的值域,再根据 a 确定函数 $y=\log_a t$ 的单调性,最后确定最值.

【诊断分析】1. 函数 $y=\log_2(x^2-1)$ 的定义域是________________,值域是________,是________(填"奇"或"偶")函数,单调递增区间是__________.

2. $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_3 x$ 同为 $(0,+\infty)$ 上的增函数,且图象都过点 $(1,0)$,怎样区分它们在同一坐标系内的相对位置?

课中探究

考点探究 素养小结

◆ **探究点一 与对数函数有关的复合函数的单调性**

例 1 (1)[2024·河南商丘高一期末] 已知函数 $f(x)=\log_3(x^2-2kx+5)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{9}{4},2\right]$

C. $\left[2,\frac{9}{4}\right)$ D. $[2,+\infty)$

(2)已知函数 $f(x)=\lg(3-3^x)$.

①求 $f(x)$ 的定义域;

②判断 $f(x)$ 的单调性,并证明.

变式 已知函数 $f(x)=\log_a(6-ax)$ 在 $(0,2)$ 上为减函数,则实数 a 的取值范围是________.